"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 22, 2012
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Didattica per "*Quaestiones*". Orientamento attraverso la formazione.

Fabio Di Raffaele[1]
fabio.diraffaele@gmail.com

Riassunto. Il seguente lavoro propone spunti di riflessione circa la responsabilità, di tutti gli insegnanti, che, attraverso la formazione nell'ambito della propria disciplina, possono stimolare, nei propri studenti, l'esigenza di individuare "l'oriente" nella scelta del loro futuro vocazionale e personale. Dopo avere proposto la definizione di "*didattica per Quaestiones*", verranno condivise alcune esperienze didattiche attraverso le quali i ragazzi, ai quali sono stati proposti problemi reali e aperti, hanno fornito valide soluzioni, personalizzate e ben argomentate.
Il risultato immediato è stato un accrescimento del livello di autostima che ha fatto leva sull'esigenza di rivedere le future scelte professionali. La seconda parte della relazione evidenzia l'importanza dell'*approccio semantico* nella didattica delle discipline scientifiche. La formazione di uno studente non può essere limitata all'addestramento al calcolo ed alla risoluzione tecnicistica dei problemi. L'approccio semantico facilita l'individuazione delle relazioni funzionali tra le grandezze in esame, elimina gli effetti del *contratto didattico* e consente di effettuare una corretta trasposizione semiotica.

Abstract. The following work offers insights about the responsibility of all teachers, who, through training in their discipline, can stimulate in their students, the need to identify "the East" in the choice of their future vocational and personal. After the proposed definition of *"Didactics through Quaestiones"*, will be shared some educational experiences through which students, who have been proposed open and real problems, have provided effective solutions, customized and well argued. The immediate result was an increase in the level of self-esteem that has relied on the need to review the future career choices. The second part of the report highlights the importance of the semantic approach in teaching science. The formation of a student can not be limited to training the calculation and the technical resolution of problems. The semantic approach facilitates the identification of functional relationships between the variables under consideration, eliminates the effects of the *"didactical contract"* and allows you to make a correct semiotic transposition.

1. Didattica attraverso le "*Quaestiones*". La formazione culturale ben fondata richiede, da parte dello studente, uno studio "vissuto", attraverso il quale il ragazzo procede nella conquista intellettuale della verità, nella conoscenza e definizione di sé. Tappe molto importanti di questo percorso sono costituite dalla partecipazione responsabile dell'alunno attraverso le domande che si pone e che manifesta nello studio di un qualsiasi argomento. Queste domande possiamo definirle "*Quaestiones"*, ovvero problemi, problematiche, che sorgono nell'alunno e da questo sono esposte. Sono riflessioni aperte, universali o particolari, teoriche o pratiche, astratte o concrete, etc. Lo studio di esse è mosso dal desiderio di verità. L'argomentazione parte da dati, a volte da verificare, procede secondo le regole della ragione, si serve del metodo e degli strumenti della disciplina. Affrontate in classe sono occasioni preziose di formazione intellettuale in particolare, se sono coinvolti più alunni, la lezione diventa occasione di esercizio del dialogo (apertura, ascolto, etc.). Qualche *quaestio* può essere utilizzata per organizzare una *dissertatio* da affrontare con rigore. E' auspicabile che i docenti di tutte le discipline aiutino gli studenti a creare un clima di ricerca attraverso lo stile della didattica, problematico, nel senso di chi non è appagato dalle conoscenze acquisite e si propone ulteriori livelli di profondità della verità.

1.1 Orientamento attraverso le "*Quaestiones*" della matematica. La sapienza educativa dell'insegnante può offrire, agli studenti, l'opportunità di percorrere le fasi dello sviluppo cognitivo con l'obiettivo di attivare il processo di sviluppo vocazionale e personale[2]. Il docente ha il compito di orientare gli studenti (tra i 14 e i 17 anni) a formulare le prime decisioni circa il loro futuro professionale. Le attività che svolge in aula consentono ai propri studenti, in una prima fase, di esplorare le conoscenze della matematica attraverso i giochi, i laboratori e la sua storia. In questa fase l'insegnante suscita stupore, focalizza l'attenzione dei ragazzi e li rende protagonisti di un progetto formativo. Gli studenti cristallizzano le conoscenze assimilate e le riordinano attraverso processi di accomodamento. L'attrazione nei confronti della disciplina deve lasciare gradualmente spazio "all'interesse". Questa parola, derivante dal latino "inter-sum", cioè "essere-tra", mette in evidenza l'azione che il soggetto compie autonomamente e responsabilmente, per trasformare le conoscenze acquisite in competenze, realizzando

[1] Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Classico "Altavilla", Via Principe di Belmonte, 105. 90100 Palermo.
[2] Per approfondimenti sul metodo ADVP, si veda Zanniello (2003).

quanto esperito nella quotidiana attività. Entro la fine del primo biennio di liceo gli studenti così coinvolti, si liberano del contratto didattico[3] implicitamente instaurato tra docente e discente, che vincola la creatività dello studente costringendolo ad acquisire e riproporre conoscenze in funzione delle verosimili attese del professore. Cominciano dunque a proporre soluzioni personalizzate ai problemi di matematica applicata alla realtà, cimentandosi nella strutturazione di congetture e nel tentativo successivo di individuarne una dimostrazione formale.

In una recente attività laboratoriale, gli studenti avevano l'obiettivo di realizzare un modello meccanico che riproducesse la costruzione della sezione aurea di un segmento, secondo la dimostrazione di Erone di Alessandria. Si poneva il problema di determinare il centro di un anello di plastica attraverso due diametri (possibilmente perpendicolari). Anche se la costruzione riga e compasso è piuttosto semplice, la costruzione del modello reale ha presentato alcune difficoltà pratiche che sono state risolte avvalendosi di competenze trasversali di statica dei corpi rigidi. Gli studenti hanno inizialmente pensato di appendere un filo a piombo in un punto dell'anello, ma si sono accorti subito che il segmento individuato era una corda non necessariamente di lunghezza massima. Hanno pensato dunque di fissare l'anello al muro con uno spago e sullo stesso punto di applicazione hanno applicato il filo a piombo, verificando che in questo modo è possibile individuare, sull'anello, gli estremi del primo diametro. (Fig. 1)

Figura 1.

Per determinare il secondo diametro gli studenti hanno concordato che era necessario individuare preliminarmente il punto di applicazione della forza peso dell'anello; questo sarebbe servito per determinare un nuovo diametro. Gli studenti hanno scelto un piano di riferimento orizzontale ed accostandovi l'anello in modo da porre il primo diametro in orizzontale hanno calibrato il punto di applicazione (fig. 2).
Su questo nuovo punto hanno applicato il filo a piombo determinando gli estremi del secondo diametro. Il centro è stato fisicamente ottenuto per intersezione dei diametri perpendicolari.

Figura 2.

Le figure 3 e 4 illustrano, rispettivamente, la costruzione riga e compasso e il modello della costruzione di Erone, realizzato dagli studenti.

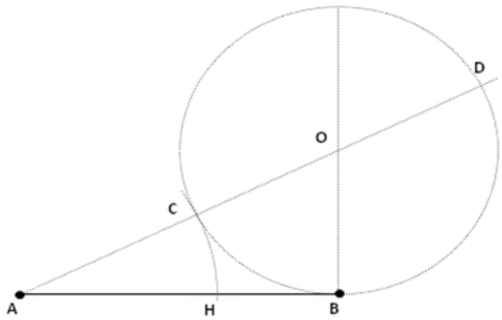


Figura 3.

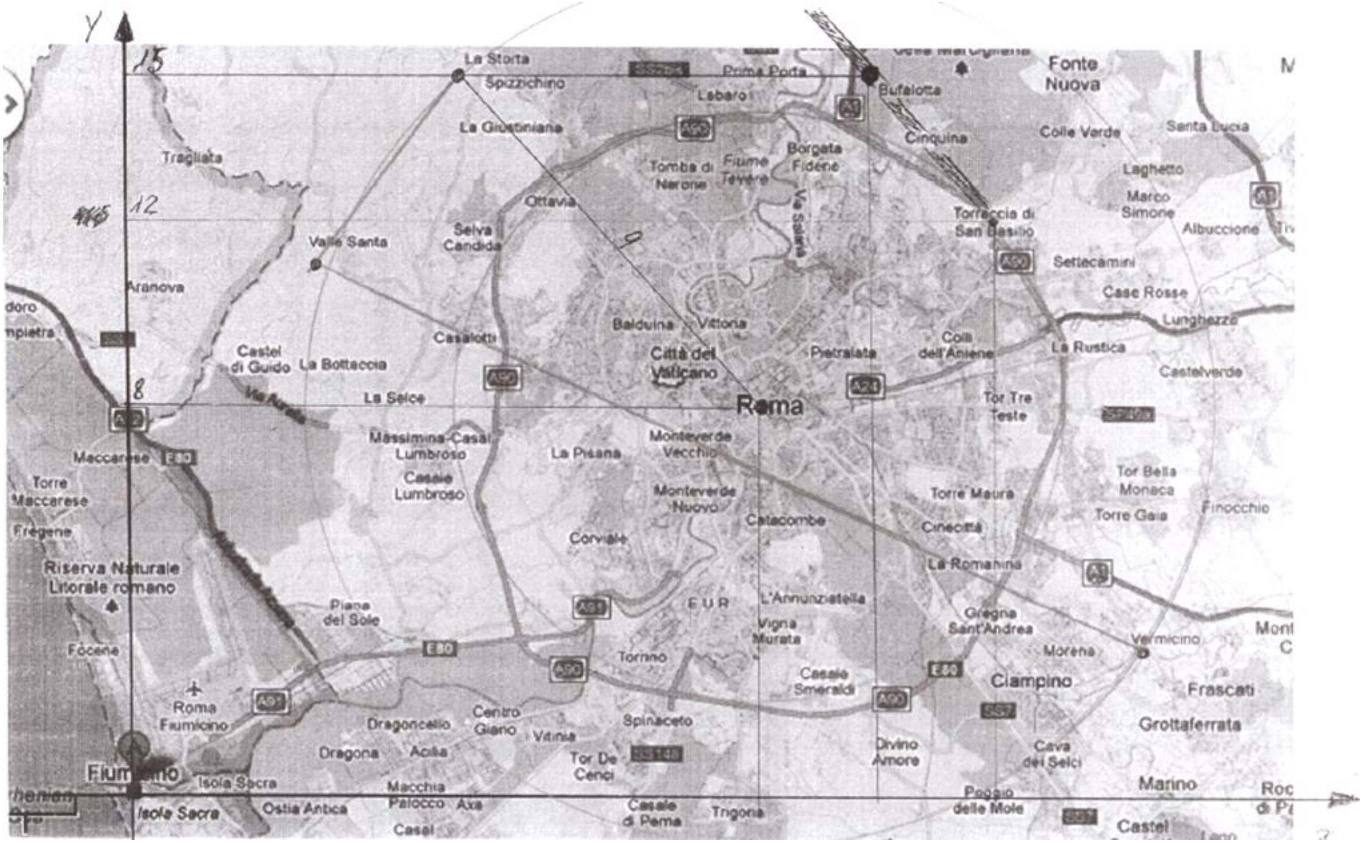
Figura 4.

[3] Su questo argomento, si veda D'amore (1999).

2. Addestramento o Formazione e Orientamento?

L'apprendimento della matematica avviene attraverso trasposizioni didattiche delle teorie della disciplina, che l'insegnante porge ai propri studenti. È importante che il docente sia consapevole di aver fornito una rappresentazione non esaustiva del concetto, che può essere ancora lontana dal concetto reale stesso e che pertanto deve essere rimodulata in funzione delle situazioni che il docente rileva in aula.[4] Si descrive, di seguito, uno stile didattico che mira a rafforzare, negli studenti, la responsabilità del proprio apprendimento, nonché l'analisi di alcune proposte didattiche.

2.1 Geometria analitica e Google Maps. Una attività di gruppo, proposta ad una quarta liceale, relativa allo studio delle coniche, che ha particolarmente coinvolto gli studenti, consiste nella progettazione di un nuovo raccordo anulare intorno alla città di Roma. Questa attività si ispira alle indicazioni didattiche relative al programma di "matematica per il cittadino"[5].



Agli studenti è stato chiesto, in prima istanza, di applicare le conoscenze di geometria per calcolare il perimetro e l'area del raccordo anulare di Roma. Gli strumenti a disposizione erano la riga ed il compasso. Il primo problema, nato dall'analisi effettuata da gruppi di studenti, era quello di individuare la circonferenza che si avvicinasse il più possibile al raccordo anulare.

Tutti erano concordi sul fatto che tale circonferenza non poteva essere determinata rilevando semplicemente una distanza tra il centro ed un punto del raccordo. Alcuni gruppi hanno dunque privilegiato l'idea di costruire una circonferenza dopo avere rilevato, dalla mappa, le coordinate di tre punti del raccordo, creando tuttavia una eccentricità rispetto al centro urbano. Altri gruppi hanno invece privilegiato l'idea di mantenere la città di Roma in posizione centrale; di conseguenza hanno calcolato la distanza media tra Roma e alcuni punti del raccordo realizzando dunque una interpolazione circolare del raccordo reale. Calcolato il valore del raggio medio hanno dedotto la lunghezza del raccordo e la superficie da questo delimitata. Si fa notare come, fin qui, non sia stato necessario determinare equazioni di curve algebriche.

[4] Intervista di Dario Ianes a B. D'Amore e M. I. Fandiño Pinilla.
[5] Si veda UMI "Matematica 2004" - *La Matematica per il Cittadino.*

La seconda proposta consisteva nella progettazione di uno svincolo tangenziale in corrispondenza del paese "Torraccia di San Basilio", che proseguisse in direzione "Bufalotta". Nasceva tra i gruppi di studenti, dunque, l'esigenza di dedurre l'equazione della circonferenza che rappresentasse il nuovo raccordo anulare, al fine di calcolare l'equazione della retta tangente in corrispondenza alle coordinate dello svincolo di "Torraccia di San Basilio".
Un problema, che non tiene conto della necessità concreta di ottenere un risultato utile, non è un problema reale. Se ad esempio, successivamente alla distribuzione della mappa, fosse stato richiesto agli studenti di desumere l'equazione della circonferenza che meglio approssima il raccordo anulare e di calcolare, successivamente, l'equazione della retta tangente al punto indicato sulla mappa, gli studenti avrebbero eseguito un procedimento sterile e privo considerazioni personali. Non avrebbe consentito, allo studente, di riflettere sui vantaggi offerti dall'attivazione di strategie già acquisite. Una esercitazione siffatta richiede abilità ma non stimola la curiosità dello studente, il quale applica più o meno consapevolmente note procedure, per ottenere un risultato comunque non analizzabile.

L'assegnazione di problemi "non reali" non favorisce lo sviluppo di capacità analitiche e critiche, convince gli studenti ad associare lo studio della matematica al noioso esercizio di memorizzazione di insignificanti formule; li allontana in definitiva dall'acquisizione di competenze e dallo sviluppo metacognitivo.
La terza proposta didattica suggeriva, agli studenti, di immedesimarsi nel ruolo di un ingegnere incaricato, dalla regione del Lazio, di realizzare la progettazione di un nuovo raccordo anulare per collegare tre zone periferiche di Roma: "*La Storta", "Vallesanta"* e *"Vermicino"*. All'interno del progetto, rivolto alla regione, l'ingegnere avrebbe dovuto indicare la lunghezza del nuovo raccordo e l'area della zona circoscritta, al fine di rendere espliciti i costi per la realizzazione del manto stradale. Gli studenti hanno utilizzato con competenza le conoscenze geometriche e algebriche, proponendo soluzioni "personalizzate", funzionali, oltre che matematicamente corrette, manifestando, in fine, la loro soddisfazione per avere saputo realizzare un progetto ingegneristico.

2.2 Il pensiero proporzionale: *l'approccio semantico* per eliminare gli effetti del "*contratto didattico*".

Non sempre gli studenti individuano con successo eventuali relazioni di proporzionalità tra grandezze, pur conoscendone le definizioni esatte e le caratteristiche. Capita, ad esempio, che durante lo svolgimento di un problema deducano erroneamente comportamenti di inversa proporzionalità dall'osservazione che al diminuire di una grandezza, l'altra aumenta. Ci si pone dunque la domanda seguente: "perché si assiste ad uno scollamento tra la parte teorica e la parte operativa?" Si potrebbe superficialmente dedurre che l'errore sia attribuibile all'insufficiente quantità di esercizi proposti agli studenti tra i primi anni della scuola secondaria di primo grado e i primi anni della scuola secondaria di secondo grado.
In questo caso l'intervento dell'insegnante che non ricerca le cause di questa misconcezione mirerà a correggere l'errore attraverso una massiccia dose di esercitazioni. L'analisi dei risultati emersi dalla collaborazione con alcuni docenti delle scuole secondarie del primo ordine suggerisce che la causa ha radici ben più profonde.
Il docente che si limita a fornire una corretta definizione di inversa proporzionalità e realizza ripetute esercitazioni di applicazione delle regole del *tre semplice*, abitua gli studenti a verificare l'esistenza di una legge di proporzionalità tra le grandezze esplicitamente dichiarate. Occorre tuttavia chiedersi se questa modalità sia sufficiente per far sì che i ragazzi comprendano quali siano le caratteristiche della costante di diretta/inversa proporzionalità da individuare. L'*approccio semantico* ad un problema, inteso in senso strutturalista[6], ovvero seguendo la necessità di indagare sui rapporti interni, al fine di produrre una classificazione per macro aree, è indispensabile per orientare gli studenti verso significative strategie analitiche.

2.3 La pavimentazione di una stanza.

Il testo del seguente problema è stato somministrato agli studenti di secondo anno di una scuola secondaria di primo grado, successivamente alla spiegazione delle leggi di proporzionalità:
La pavimentazione di un ambiente può essere ammattonata con 1800 piastrelle quadrate di lato 20 cm. Quante piastrelle quadrate di lato 15 cm occorrerebbero per ammattonare lo stesso ambiente?
Alcuni studenti, ai quali è stato sottoposto questo problema, hanno preliminarmente osservato che la diminuzione delle dimensioni delle mattonelle causa un incremento del numero di mattonelle necessarie per pavimentare. Così, poiché l'addestramento prevedeva la creazione di una tabella e poiché i dati espliciti del problema riguardavano da dimensione del lato della mattonella ed il numero di mattonelle necessarie, hanno posto questi dati in proporzione inversa.

[6] Per un quadro più approfondito dei diversi approcci al problema semantico cfr. Violi (1997)

Tabella 1. Tabulazione dei dati del problema.

Lato mattonella	**Numero Mattonelle**
20 cm	1800
15 cm	X

Applicando poi la regola del tre semplice, hanno posto in proporzione inversa gli elementi delle classi contigue ottenendo la proporzione 20 : 15 = x : 1800, dalla quale hanno erroneamente dedotto che il numero di mattonelle di lato 15 cm deve essere 2400.

Tabella 2. Erronea posizione di inversa proporzionalità.

Lato mattonella	**Numero Mattonelle**
↓ 20 cm	1800
15 cm	X ↑

Altri studenti hanno invece utilizzato la definizione di inversa proporzionalità tra le classi contigue, deducendo erroneamente che la costante fosse 3600 (senza peraltro specificarne la misura); hanno concluso infine che il numero di mattonelle necessario sarebbe dovuto essere 240 perché ottenuto dall'equazione 15 x = 3600. Questa procedura pone in evidenza due aspetti importanti, relativi alle capacità analitiche e critiche degli studenti; questi infatti:

- non assumono un atteggiamento analitico, rinunciando a indagare sul significato geometrico della grandezza eventualmente rappresentata dal prodotto delle classi contigue;
- non acquisiscono capacità critiche; ciò si evince dall'assenza di commenti sul risultato contraddittorio con la posizione di inversa proporzionalità.

Tabella 3. Erronea posizione di inversa proporzionalità.

Lato mattonella	**Numero Mattonelle**	**Prodotto tra le grandezze**
20 cm	1800	3600
15 cm	X	15 x

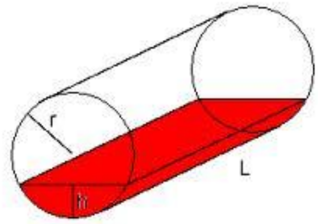
Lo stesso problema è stato successivamente somministrato ad alcuni studenti del primo anno del medesimo ciclo di studi; questi, non avendo ancora studiato le proporzioni, hanno risolto il problema correttamente, ricorrendo a consolidate strategie geometriche. L'interpretazione geometrica è, per questo tipo di problema, la più naturale in quanto non necessita di un cambio di registro semiotico. Gli studenti del II anno invece, avendo affrontato il problema in occasione di una esercitazione relativa allo studio delle proporzioni, hanno seguito il suggerimento implicito di effettuare una trasposizione semiotica, trasformando il problema geometrico in un problema algebrico di proporzionalità. L'approccio semantico, nella sua accezione strutturalista, facilita l'individuazione delle relazioni funzionali tra le grandezze e consente di effettuare una corretta trasposizione.
In questo caso, dopo avere classificato le grandezze esplicite ed implicite del problema, gli studenti avrebbero dovuto individuare la grandezza invariante (rispetto al prodotto, nel caso di inversa proporzionalità). Ed è chiaro che l'area della stanza da pavimentare è invariante rispetto ai fattori "area della mattonella" e "numero delle mattonelle". La tabella corretta sarebbe dovuta essere strutturata in funzione di queste due grandezze. Così all'incognita sarebbe corrisposto il valore corretto di 3200 mattonelle.

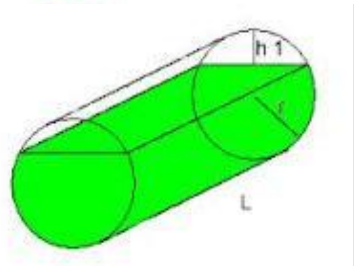
Tabella 4. Impostazione coerente di inversa proporzionalità.

Area mattonella	**Numero Mattonelle**	**Area Ambiente**
400 cm^2	1800	720.000 cm^2
225 cm^2	X	225 x cm^2

2.4 La cisterna del gruppo elettrogeno.

Diversi anni fa, quando mi occupavo di tecnologie di reti delle telecomunicazioni, alcuni colleghi mi chiesero di risolvere un problema: non si riusciva ad effettuare una buona stima della quantità di carburante da integrare nelle cisterne cilindriche di tutti i gruppi elettrogeni dislocati nelle zone rurali delle città. Alcune volte il carburante calcolato eccedeva di alcune decine di litri, altre volte mancava carburante per colmare la cisterna. Eppure il problema sembrava di facile soluzione. La cisterna, interrata orizzontalmente, era ispezionabile attraverso una asta metrica che, inserita nel “passo d’uomo” (apertura posta nella parte più alta del cilindro interrato), si impregnava di carburante e ne indicava il livello. Nota la capacità della cisterna (2000 litri) veniva applicata una proporzione diretta tra il diametro della cisterna, il volume totale, il livello rilevato ed il volume del carburante residuo. Dove si annidava l’errore?





Questa esperienza evidenzia i rischi dipendenti dall’uso intuitivo e tecnicistico della teoria delle proporzioni. Se la cisterna fosse stata posta in verticale, sarebbe stato possibile porre in relazione di diretta proporzionalità il volume occupato dal liquido con il livello di carburante, in quanto il rapporto è costantemente dato dalla superficie di base del cilindro. Le stesse grandezze non sono evidentemente correlate da relazioni di diretta proporzionalità, se il cilindro viene posto in orizzontale (la superficie del carburante varia come evidenziato nelle figure a fianco). Con brevi passaggi trigonometrici è comunque possibile determinare una funzione dipendente dalla variabile “livello di carburante”; questa restituisce, con precisione, la quantità di liquido da integrare.

Conclusioni

I processi di condivisione e di negoziazione di significati in aula conducono alla costruzione sociale della conoscenza in quanto il contributo esperienziale di ciascun individuo rende la lezione unica. Gli errori e le incomprensioni sono opportunità per sviluppare confronti costruttivi con tutta la classe, per elaborare originali strategie e per superare le criticità. In questo percorso l’insegnante, che si arricchisce di nuove esperienze, agisce con un processo di orientamento che permette agli studenti di aprire nuovi orizzonti rispetto alle idee circa il loro futuro professionale.

Alla frase di stupore di uno studente che, in aula, osserva che *“In alcune situazioni è difficile cogliere la semplicità della matematica”*, aggiungo che *“quando questa si rivela, si manifesta in tutto il suo splendore”*.

Bibliografia

D'Amore, B. (1999), Complementi di matematica per l'indirizzo didattico – Volume 6 – *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora Editrice Bologna.

Violi, P. (1997), *Significato ed esperienza*, Bompiani, Milano.

UMI "Matematica 2004" *La Matematica per il Cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculo di matematica (Quinta classe del ciclo secodnario di secondo grado)*

Zanniello, G. (2003), Didattica Orientativa. Una metodologia per l'attivazione dello sviluppo professionale e personale- Tecnodid S.r.l., Napoli

Sitografia

http://www.ellegieducational.com/d_amore_fandino/PESCARA_28_05_10.pdf
Bruno D'Amore - Martha Isabel Fandiño Pinilla, Difficoltà nell'apprendimento della matematica – Ostacoli.

http://gold.indire.it/goldvideo2/watch2.php?v=LGWUAK7K
Dario Ianes intervista B, D'Amore e M. I. Fandiño Pinilla.